Cours fondamental 1 (M2 LMFI)
"Théorie des modèles et théorie des ensembles"
automne 2013

FEUILLE D'EXERCICES 6

Exercice 1. Soit T une théorie complète ayant des modèles infinis, et soit C un modèle ω-saturé de T.

(1) On suppose que T est ω-catégorique.
(2) Pour $A \subseteq C$, on pose $T_A := \mathrm{Th}(C_A)$. Montrer que T_A est ω-catégorique ssi A est fini.
(3) Montrer que $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est fini. Plus généralement, montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $A \subseteq C$ avec $\mid A \mid = n$ on ait $\mid \mathrm{acl}(A) \mid \leq f(n)$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}_1$ la classe des ordres partiels finis, $\mathcal{C}_2$ la classe des graphes sans triangles et $\mathcal{C}_3$ la classe des ensembles finis muni d'une bijection.

(1) Montrer que $\mathcal{C}_i$ a les propriétés (HP), (JEP) et (AP) pour $i = 1, 2, 3$.
(2) Soit $T_i = \mathrm{Th}\,(D_i)$, où D_i est la limite de Fraïssé de $\mathcal{C}_i$. Donner une axiomatisation de T_i pour $i = 1, 2, 3$.
(3) Montrer que D_3 n'est pas saturée.
(4) Montrer que T_2 et T_3 ne sont pas finiment axiomatisable.
(5) (Plus difficile) Donner une axiomatisation finie de T_1.

Exercice 3 (Nombre de modèles dénombrables).

(1) Donner une théorie complète dans un langage dénombrable ayant $2^{\aleph_0}$ modéles denombrables à isomorphisme près.
(2) Soit $L = \{E\,(x, y)\}$. On considère la L-théorie T qui exprime que $E\,(x, y)$ est une relation d'équivalence ayant exactement une classe à n éléments pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
   (a) Montrer que T est complète, et qu'elle a l'élimination des quantificateurs si on ajoute les prédicats unairs $R_n\,(x) := \exists y_0 \ldots \exists y_n \left(\bigwedge_{i \neq j \leq n} y_i \neq y_j \neq x \wedge \bigwedge_{i<n} y_i E x \right)$ au langage.
   (b) Remarquer que T a un nombre infini de modèles dénombrables, mais qu'elle est catégorique en tout cardinal non dénombrable.
(3) Soit L_3 un langage qui comporte un prédicat binaire $\leq$ et une liste dénombrable de constantes $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Soit T_3 telle que ses axioms expriment que $\leq$ est un ordre dense sans extrémités, et que $c_0 < c_1 < \ldots$.
   (a) Observer que T_3 est complète et élimine les quantificateurs.
   (b) Montrer que T_3 a exactement trois modèles dénombrables à isomorphisme près (on distinguera les cas où la suite $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est majorée, sans ou avec supremum).
   (c) Soit $L_4 = L_3 \cup \{P\,(x)\}$ et $T_4 \supseteq T_3$ exprimant que $P\,(x)$ est dense et codense. Montrer que T_4 est une théorie complète, ayant exactement 4 modèles dénombrables. Généraliser pour tout $n \geq 3$.
   (d) Le langage L_3 est infini. Construire une théorie complète T_3' dans un langage **fini** ayant exactement trois modèles dénombrables.
   [Indication: Soit M un modèle dénombrable de la théorie T de (2) ayant un nombre infini de classes infinies. Soit $<^*$ une relation telle que
      (i) $\forall x, y, x', y' \left((x <^* y \wedge x' E x \wedge y' E y) \to x' <^* y' \right)$,
      (ii) $\left(M/E^M, <^* \right)$ est un ordre dense sans extrémités,
      (iii) toutes les classes d'équivalence finies sont ordonnées selon leur cardinal.
   Considérer la théorie $\mathrm{Th}\,(M, E, <^*)$.]

Exercice 4 (Théorème de Vaught). Dans cet exercice nous montrons qu'il n'existe pas de théorie T dans un langage L dénombrable ayant exactement deux modèles dénombrables à isomorphisme près (Théorème de Vaught).

(1) Supposons au contraire que T est une théorie dans un langage L dénombrable ayant exactement deux modèles dénombrables. Rappelons que tout modèle atomique de T est premier.
(2) Observer que $S_n(T)$ est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire qu'il existe un modèle premier M_1 (Théorème d'omission des types) et un modèle dénombrable saturé M_2 (construction d'une chaine élémentaire).
(3) Observer que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in S_n(T)$ non-isolé (Théorème de Ryll-Nardzewski).
(4) Soit $\bar{a} \in M_2$ tel que $M_2 \models p(\bar{a})$. Soit $T' = \mathrm{Th}(M_2, \bar{a})$. Montrer que T' n'est pas ω-catégorique et que $(M_2, \bar{a})$ est un modèle ω-saturée de T'.
(5) Donc il existe M', un modéle premier de T'. Soit $M_3 = M' \restriction L$.
(6) En déduire que T' admet un modèle premier M'. Soit $M_3 = M' \restriction L$,
(7) Montrer que M_1, M_2, M_3 ne sont pas isomorphes.

Exercice 5 (Interprétations).

Definition. (1) Soit N une $\mathcal{K}$-structure, M une $\mathcal{L}$-structure. Une *interprétation* de N dans M est composée des données suivantes:
   (a) une bijection $f : D/E \to N$, où $D \subseteq M^n$ est un ensemble définissable et $E \subseteq D \times D$ une relation d'équivalence définissable (on notera $F : D \to N$, $F(d) = f(d/E)$); on choisit une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{\mathrm{Dom}}(\bar{x})$ telle que $D = \phi_{\mathrm{Dom}}(M)$;
   (b) à tout symbole de relation $R(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{K}$ est associée une $\mathcal{L}$-formule $\phi_R(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$, avec $\bar{x}_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$, telle que pour tout $\overline{d} \in D^m$ on ait $M \models \phi_R(\overline{d})$ ssi $N \models R(F(d_1), \ldots, F(d_m))$;
   (c) de même, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}$ et toute constante $c \in \mathcal{K}$, une formule est associée au graphe de la fonction (voire constante), c'est-à-dire où $R(\bar{x})$ est remplacé par la formule $f(x_1, \ldots, x_m) = x_{m+1}$ ou par $c = x_1$, pour obtenir $\phi_f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{m+1})$ ou $\phi_c(\bar{x}_1)$.

(2) On dit qu'il s'agit d'une interprétation *avec paramètres* de N dans M s'il existe $A \subseteq M$ tel que N est interprétée dans M_A.
(3) Soit T' une $\mathcal{K}$-théorie complète et T une $\mathcal{L}$-théorie complète. On dit que T' est *interprétable dans* T s'il existe $N \models T'$ et $M \models T$ telles que N soit interprétable dans M.

Notons que si T' est un réduit de T, alors T' s'interprète dans T.

(1) (a) Soit A un anneau intègre avec corps des fractions K, les deux considérés comme $\mathcal{L}_{an}$-structures. Montrer que K s'interprète dans A (sans paramètres).
   (b) Soit K un corps et $L \subseteq K$ une extension finie de corps (c'est-à-dire L est de dimension finie en tant que K-espace vectoriel; par exemple, L peut être égal à $K(\alpha)$ pour un élément α qui est algébrique sur K). Montrer que L admet une interpréation (avec paramètres) dans K.
(2) On suppose donnée une interprétation de N dans M, avec les notations ci-dessus. Montrer:
   (a) Pour toute $\mathcal{K}$-formule $\phi(v_1, \ldots, v_m)$ il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi_\phi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ satisfaisant
$$M \models \forall \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m \left(\psi_\phi \to \bigwedge_{i=1}^{m} \phi_{\mathrm{Dom}}(\bar{x}_i) \right)$$
   et telle que pour tout $\overline{d} \in D^m$ on ait
$$M \models \psi_\phi(\overline{d}) \text{ ssi } N \models \phi(F(d_1), \ldots, F(d_m)).$$
   (b) Si $M_1 \equiv M$, alors on obtient de manière canonique (par les formules utilisées pour l'interprétation de N dans M), une $\mathcal{K}$-structure N_1 interprétée dans M_1 et telle que $N_1 \equiv N$.
   (c) Soit κ un cardinal infini. Si M est κ-saturée, alors N est κ-saturée aussi.
(3) On suppose que T' admet une interprétation dans T, où T et T' sont des théories complètes.

(a) Montrer que pour tout $N_0 \models T'$ il existe une extension élémentaire $N_1 \succeq N_0$ telle que N_1 admette une interprétation dans un modèle M_1 de T.
[Indication: Par hypothèse, il existe $N \models T'$ et $M \models T$ telles que N s'interprète dans M. On pourra trouver N_1 comme extension élémentaire commune de N_0 et N.]
(b) On suppose que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ sont dénombrables. Montrer que si T est ω-catégorique, alors T' est ω-catégorique aussi.

Exercice 6 (Suites indiscernables).

Definition. Soit T une L-théorie et soit $M \models T$. Soit $(I, <)$ un ordre total infini. Une suite $(a_i)_{i\in I}$ d'elements de M est *indiscernable* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_1 < \ldots < i_n, j_1 < \ldots < j_n \in I$ et $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L$:

$$M \models \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \Leftrightarrow M \models \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

(1) Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M, et soit $(I, <)$ un ordre total infini quelconque. Montrer qu'il existe un modèle $N \succeq M$ et une suite indiscernable $(b_i)_{i\in I}$ dans N *basé sur* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_1 < \ldots < i_n \in I$ et $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ il y a $j_1 < \ldots < j_n \in \mathbb{N}$ telles que

$$N \models \phi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \Leftrightarrow M \models \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

[Indication: utiliser le théorème de Ramsey, la méthode des diagrammes et la compacité.]
(2) Soit $M \models \mathrm{ACF}_0$. Donner une suite indiscernable infinie basé sur $(1, 2, 3, \ldots)$.
(3) Plus généralement, si $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite indiscernable avec $a_0 \neq a_1$ dans M, montrer que pour tout $S \subseteq \mathbb{N}$, si $i \notin S$ alors $a_i \notin \mathrm{acl}\left(\bigcup_{j\in S} a_j\right)$.
[On peut montrer par compacité que pour tout $i_* < j_* \in \mathbb{N}$, il existe $N \succeq M$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{Q}}$ dans N telles que $(a_i)_{0\le i<i_*} \frown (b_k)_{k\in\mathbb{Q}} \frown (a_j)_{j_*\le j\in\mathbb{N}}$ est une suite indiscernable.]
(4) On dit que une suite indiscernable est *totalement indiscernable* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_1 \neq \ldots \neq i_n, j_1 \neq \ldots \neq j_n \in I$ et $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ on a:

$$M \models \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \Leftrightarrow M \models \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

Montrer que si une suite indiscernable $(a_i)_{i\in I}$ dans M n'est pas totalement indiscernable, alors il existe $N \succeq M$ et une formule $\phi(x, y)$ avec paramètres dans N telle que pour tous $i, j \in I$, $i < j$ ssi $N \models \phi(a_i, a_j)$.
[Indication: Utiliser que le groupe $\mathrm{Sym}(A)$ des permutations d'un ensemble A fini est engendré par les transpositions.]

Exercice 7 (Modèles d'Ehrenfeucht et Mostowski).

Definition 1. On dit qu'uné L-théorie T possède des *fonctions de Skolem* si pour toutes formules $\phi(x, \bar{y}) \in L$ il existe un symbole de fonction $f_\phi(\bar{y}) \in L$ telle que $T \vdash (\exists x \phi(x, \bar{y})) \leftrightarrow \phi(f_\phi(\bar{y}), \bar{y})$.

(1) Soit T une L-théorie complète ayant un modèle infini. Montrer qu'il existe un langage $L' \supseteq L$ et une L'-theorie $T' \supseteq T$ complète telle que:
(a) $|L'| \le |L| + \aleph_0$,
(b) pour toute formule $\phi(x, \bar{y}) \in L$, il existe $f_\phi(\bar{y}) \in L'$ telle que $T' \vdash (\exists x \phi(x, \bar{y})) \leftrightarrow \phi(f_\phi(\bar{y}), \bar{y})$.
Conclure qu'il existe $L^* \supseteq L$ tel que $|L^*| \le |L| + \aleph_0$ et une théorie complète $T^* \supseteq T$ ayant des fonctions de Skolem.
(2) Observer que si T a des fonctions de Skolem, $M \models T$ et $A \subseteq M$, alors $\mathrm{dcl}(A) \preceq M$.
(3) Montrer que pour tout cardinal $\kappa \ge |L| + \aleph_0$, il existe $N \models T$ de cardinalité κ qu'il y a 2^κ automorphismes de N.
(a) Soit κ un cardinal infini. Soit $X = \kappa \times \mathbb{Q}$ muni de l'ordre lexicographique $\lhd$ (i.e. $(\alpha, q) \lhd (\beta, r)$ si $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ et $q < r$). Montrer qu'il y a 2^κ permutations de X qui respectent l'ordre $\lhd$.
(b) Soit T^* une L^*-théorie avec des fonctions de Skolem, $M \models T^*$ et $(a_i)_{i\in Y}$ une suite L^*-indiscernable dans M, où $(Y, <)$ est un ordre infini. Soit $N = \mathrm{dcl}\left((a_i)_{i\in Y}\right)$ et

$\sigma : (Y, <) \to (Y, <)$ une permutation de Y qui préserve l'ordre. Montrer qu'il existe un automorphisme τ de N tel que $\tau(a_i) = \tau(a_{\sigma(i)})$.

(c) Utiliser (1) et l'Exercice 6 pour conclure.

Artem Chernikov
chernikov@math.jussieu.fr
chernikov.me